

KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE

materiały dydaktyczne przygotowane w ramach warsztatów metodycznych

Opracowanie: *Maria Bielak*

Sławomir Sorek

Katarzyna Sztur

pod kierunkiem: *Joanny Kozubal*

PCEN oddział w Tarnobrzegu

Wstęp

Matematyka ma niewątpliwy wpływ na rozwój logicznego myślenia, argumentowania, wnioskowania, kształcenia umiejętności projektowania, tak bardzo potrzebnych w dobie cyfrowego i technologicznego rozwoju. Problemy matematyczne, konstrukcyjne towarzyszą ludzkości od zawsze. Matematyka jest obecna w wielu dziedzinach życia, niezbędna w wykonywaniu różnorodnych zawodów, a jej właściwe rozumienie sprzyja podnoszeniu kwalifikacji i kompetencji intelektualnych.

W latach 60-tych XX wieku w programie szkoły poświęcano sporo uwagi tej problematyce z uwagi na potrzebę kształcenia politechnicznego w naszym kraju. Intensywny rozwój technologiczny wymuszał potrzebę kształcenia inżynierów, specjalistów technicznych. W latach 90-tych zaniedbano nieco ten kierunek rozwoju szkolnictwa. Od pewnego czasu można jednak zaobserwować próbę powrotu na drogę specjalizacji zawodowych, którą wymusza sytuacja ogólnoswiatowa. Potrzeba kształcenia specjalistów nowoczesnych technologii związanych z coraz większą komputeryzacją i cyfryzacją różnych dziedzin życia, które dotychczas nie wymagały zatrudniania kreatywnych fachowców i wysoko wyspecjalizowanych inżynierów oraz programistów, ma wpływ na zmianę systemu myślenia o edukacji matematycznej. Aby mogły powstawać nowoczesne konstrukcje przy użyciu najnowszych metod i narzędzi istnieje potrzeba znajomości podstawowych zasad i własności prostych konstrukcji geometrycznych mających wpływ na kształcenie i rozumienie coraz bardziej skomplikowanych i zaawansowanych technologii.

Historycznie rzecz ujmując najstarszymi konstrukcjami geometrycznymi są te wykonane za pomocą linijki i cyrkla nazywane konstrukcjami klasycznymi lub konstrukcjami Platońskimi. Należą do nich konstrukcja prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, okręgu o danym środku i danym promieniu, symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, prostych równoległych itp. Niektóre zadania konstrukcyjne określane są mianem konstrukcji niewykonalnych, czyli takich, których nie można wykonać za pomocą cyrkla i linijki. Przykładami konstrukcji niewykonalnych są słynne zadania konstrukcyjne sformułowane już w starożytnej Grecji, należą do nich: podwojenie sześcianu, trysekcja kąta, kwadratura koła. Mimo, że zostały one rozwiązane przez starożytnych Greków, to jednak wątpliwości wzbudzały użyte przyrządy konstrukcyjne i sposób przeprowadzenia samej konstrukcji. Konstrukcje te stały się nieaktualne, gdy wybitny filozof Platon ustalił, że konstrukcje można wykonać jedynie za pomocą cyrkla i linijki. Jego autorytet był tak wielki, że ustalenia te zostały przyjęte i dopiero w XIX wieku udowodniono, że wymienionych wcześniej konstrukcji wykonać nie sposób posługując się metodą Platońską. Ostatni z terminów niewykonalnych konstrukcji „kwadratura koła” wykorzystywany jest nawet w języku potocznym jako sprawa, zadanie, które jest niemożliwe do rozwiązania. W najprostszym ujęciu można powiedzieć, że kwadratura koła jest konstrukcją niewykonalną, ponieważ liczba π jest liczbą przestępną i możliwe są jedynie konstrukcje kwadratów o polach zbliżonych do polu danego koła. Można natomiast przeprowadzać kwadratury dowolnych wielokątów, np. kwadraturę trójkąta. W wykonywaniu konstrukcji geometrycznych dzisiaj możemy korzystać

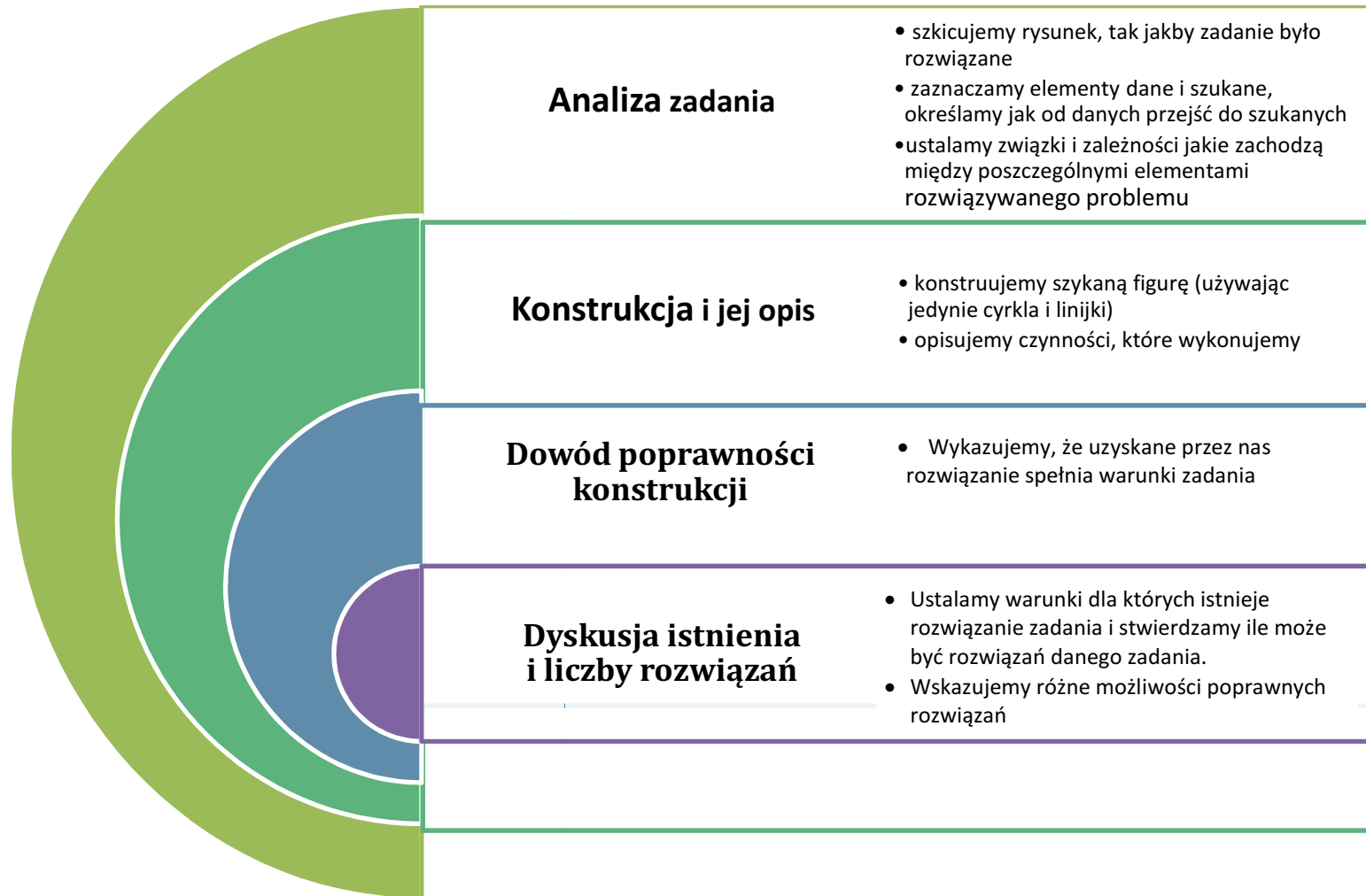
z pomocy aplikacji i programów komputerowych, które w znaczący sposób wpływają na możliwość dokonywania analizy zadania konstrukcyjnego oraz rozpatrywanie różnorodnych przypadków, ułatwiają one dowodzenie poprawności konstrukcji. Dzięki nim w znaczący sposób rozwinęła się cyfryzacja, robotyka, grafika komputerowa, itp.

Celem niniejszego opracowania jest przybliżenie odbiorcom problematyki przeprowadzania konstrukcji geometrycznych, ułatwienie zrozumienia wybranych własności figur geometrycznych.

Spis treści

| | |
|--|----|
| Etapy konstrukcji geometrycznych | 5 |
| I. Konstrukcja symetralnej odcinka AB | 6 |
| II. Konstrukcja stycznej do okręgu w dowolnym punkcie..... | 8 |
| III. Konstrukcja środka okręgu..... | 10 |
| IV. Konstrukcja prostej l równoległej do k , położonej od prostej k w odległości a | 12 |
| V. Konstrukcja odcinka o długości $\sqrt{a^2 + b^2}$ mając dane długości odcinków aib , gdzie a < b | 14 |
| VI. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt .. | 16 |
| Sposób 1 | 16 |
| Sposób 2..... | 17 |
| Sposób 3..... | 20 |
| VII. Konstrukcja odcinka o długości $\frac{2a}{5}$ | 22 |
| Sposób 1..... | 22 |
| Sposób 2..... | 27 |
| VIII. Konstrukcja trójkąta przy danej sumie dwóch boków, kąta i wysokości | 29 |

Etapy konstrukcji geometrycznych

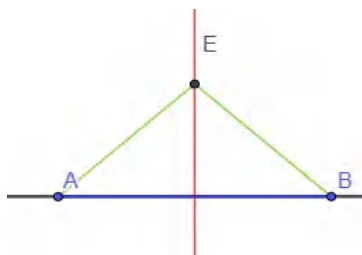


I. Konstrukcja symetralnej odcinka AB

Zadanie. Dany jest odcinek AB . Skonstruuj prostą, która będzie symetralną tego odcinka.

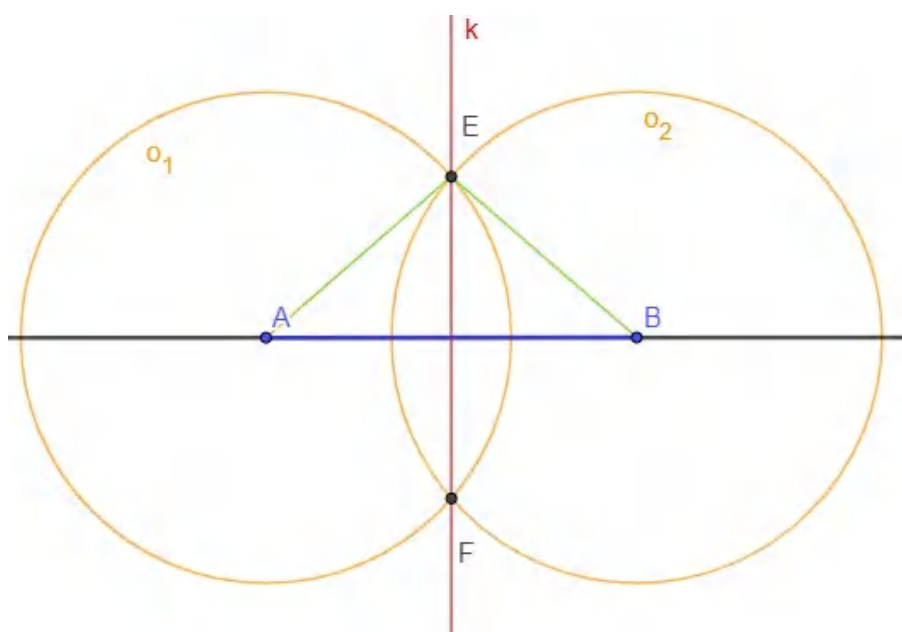
1. Analiza zadania

Niech prosta k będzie symetralną odcinka AB , to znaczy, że każdy punkt należący do prostej k jest równoodległy od końców odcinka AB . Punkty równoległe od punktu A leżą na okręgu o promieniu r , podobnie punkty równoodległe od punktu B leżą na okręgu o tym samym promieniu r .



2. Konstrukcja i jej opis

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|--|--|
| 1. | Rysujemy prostą i zaznaczamy na niej punkty A i B . | Odcinek AB . |
| 2. | Kreślimy okrąg o_1 o środku w punkcie A i promieniu r , tak by przeciął się z odcinkiem AB . | Okrąg o_1 . |
| 3. | Kreślimy okrąg o_2 o środku w punkcie B i promieniu r . | Okrąg o_2 oraz punkty E i F przecięcia się dwóch narysowanych okręgów. |
| 4. | Przez punkty E i F kreślimy prostą k . | Symetralną odcinka AB . |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Z konstrukcji okręgu punkty E i F leżą na okręgu o_1 o środku w punkcie A i promieniu r . Te same punkty są również punktami okręgu o_2 o środku w punkcie B i promieniu r . Zatem punkty E i F leżą na prostej k w równej odległości od końców odcinka A i B czyli leżą na symetralnej odcinka. Prosta k jest symetralną odcinka AB .

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

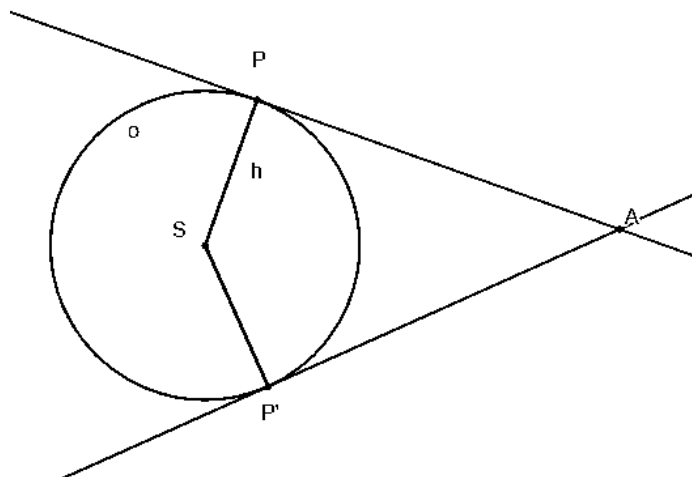
Zadanie ma dokładnie jedno rozwiązanie o ile $A \neq B$ oraz $r > \frac{1}{2}|AB|$.

Link do aktywności w aplikacji Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/xn24zda8>

II. Konstrukcja stycznej do okręgu w dowolnym punkcie

Zadanie. Dany jest okrąg o środku w punkcie S o promieniu r oraz dowolny punkt A . Skonstruuj styczną do danego okręgu przechodzącą przez punkt A .

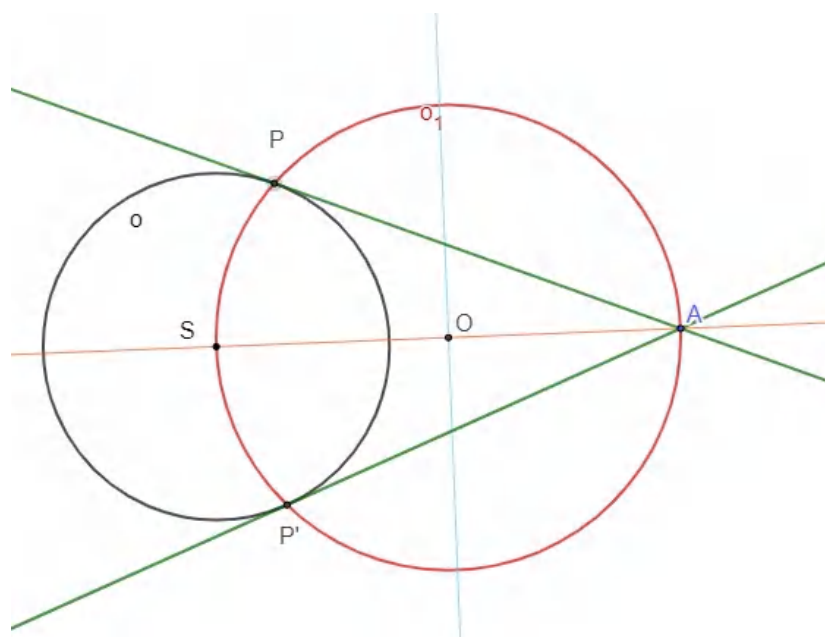
1. Analiza zadania



Styczna do okręgu jest prostą prostopadłą do promienia okręgu poprowadzonego z punktu styczności i mająca z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem. Niech punkt P będzie punktem styczności szukanej prostej i okręgu $o(S, r)$, punkt A punktem przez który należy poprowadzić styczną do okręgu. Wówczas $|\sphericalangle SPA| = 90^\circ$. Punkt S należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek SA .

2. Konstrukcja i jej opis

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|---|
| 1. | Kreślimy okrąg o środku w punkcie S i promieniu r oraz ustalamy dowolny punkt A . | Okrąg $o(S, r)$. |
| 2. | Kreślimy prostą przechodzącą przez punkty A i S . | Odcinek AB . |
| 3. | Konstruujemy symetralną odcinka SA . | Punkt O środek odcinka SA . |
| 4. | Kreślimy okrąg o przechodzący przez punkty S i A o środku w punkcie O . | Okrąg $o_1(O, r_1)$ oraz punkty przecięcia się okręgów P i P' . |
| 5. | Szkicujemy proste AP i AP' . | Szukane styczne. |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Z konstrukcji symetralnej odcinka AS , punkt O jest środkiem okręgu i $|SO| = |OA|$
 $|\sphericalangle SPA| = |\sphericalangle SP'A| = 90^\circ$, bo są to kąty wpisane oparte na średnicy.
 Odcinki SP i SP' są promieniami okręgu i są prostopadłe do prostych AP i AP' ,
 więc te proste są stycznymi do okręgu poprowadzonymi przez punkt A .

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

- Zadanie ma dwa rozwiązania – istnieją dwie styczne spełniające warunki zadania, gdy punkt A leży poza okręgiem.
- Zadanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy punkt A leży na okręgu.
- Zadanie nie ma rozwiązania, gdy punkt A leży wewnątrz okręgu.

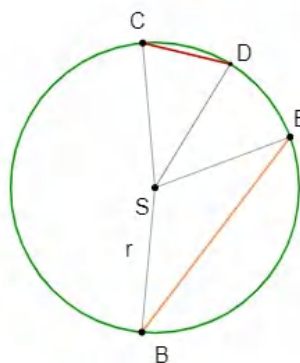
Link do aktywności w aplikacji Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/qtsdgmaj>

III. Konstrukcja środka okręgu

Zadanie. Dany jest okrąg o . Skonstruuj środek S tego okręgu.

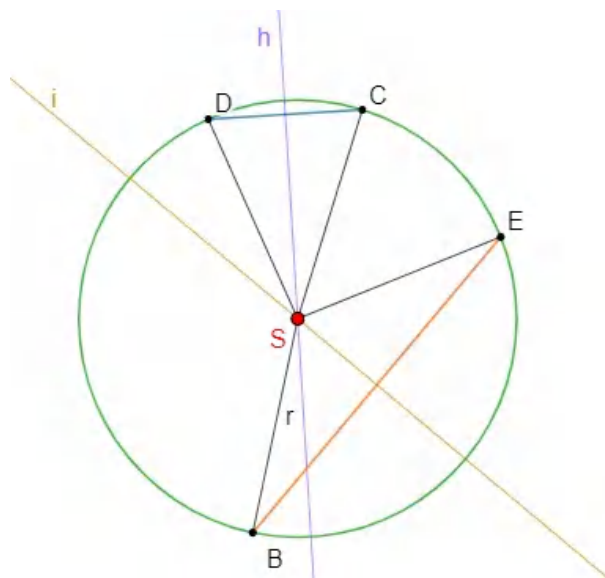
1. Analiza zadania

Dany jest dowolny okrąg. Szukamy jego środka. Środek okręgu to punkt równoodległy od każdego z punktów na tym okręgu. Punkt ten jest punktem przecięcia się co najmniej dwóch średnic tego okręgu. Należy więc narysować dwie dowolne nierównoległe cięciwy i ich symetralne. Punkt przecięcia się symetralnych cięciw, będzie szukanym środkiem okręgu.



2. Konstrukcja i jej opis

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|--|
| 1. | Zaznaczamy na okręgu cztery dowolne i różne punkty, które oznaczamy B, C, D, E i łączymy je parami. | Cięciwy CD i BE (możemy połączyć te punkty parami w dowolny sposób). |
| 2. | Kreślimy symetralne cięciw CD i BE . | Proste h oraz i . |
| 3. | Oznaczamy punkt S przecięcia się prostych h oraz i . | Punkt S będący szukanym środkiem okręgu. |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Punkty B, C, D, E jako końce cięciw okręgu leżą na okręgu. Z własności symetrycznych odcinków wiemy, że są to zbiory punktów równoodległych od końców odcinka.

Zatem $|SC| = |SD|$ oraz $|SB| = |SE|$, ponieważ punkt S jest punktem wspólnym obu symetrycznych więc $|SC| = |SD| = |SB| = |SE| = r$. Zatem punkt S jest środkiem danego okręgu.

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

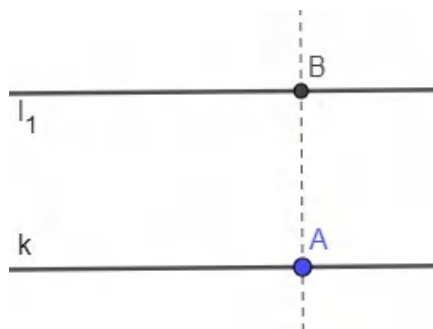
Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie o ile cięciwy DC i BE nie są równoległe, w przeciwnym przypadku ich symetralne się pokrywają i wyznaczenie środka nie jest możliwe.

Link do aktywności w aplikacji Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/pmgucaqr>

IV. Konstrukcja prostej l równoległej do k , położonej od prostej k w odległości a

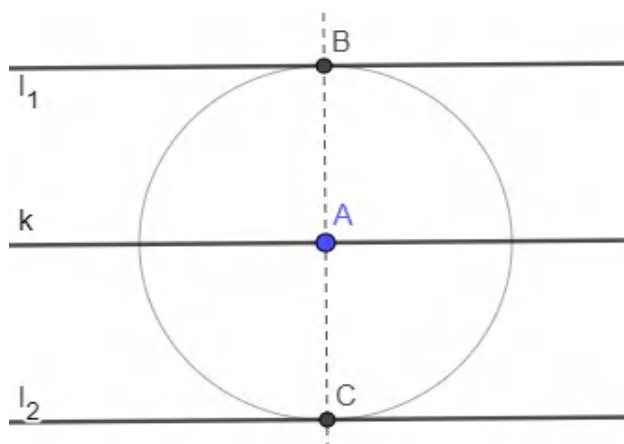
1) Analiza zadania

Niech l będzie szukaną prostą. Punkt A należy do prostej k i punkt B należy do prostej l , oraz $|AB| = a$. Odcinek AB jest prostopadły do prostej k i do prostej l , więc proste k i l są równoległe.



2) Konstrukcja i jej opis

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|--|---|
| 1. | Na prostej k zaznaczamy dowolny punkt A . | |
| 2. | Kreślimy prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt A . | Proste prostopadłe. |
| 3. | Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i promieniu a , który przecina prostą prostopadłą w punktach B i C . | Okrąg $o(A, a)$ oraz punkty B i C . |
| 4. | Kreślimy proste prostopadłe do prostej BC i przechodzące odpowiednio przez punkty B i C , które oznaczamy l_1, l_2 . | Szukane proste równoległe w odległości a od prostej k . |



3) Dowód poprawności konstrukcji

$|AB| = |AC| = a$ (z konstrukcji okręgu)

BC jest prostopadłe do k i BC jest prostopadłe do l_1, l_2 (z konstrukcji)

Zatem $l_1 \parallel k$ i $l_2 \parallel k$, a ich odległość od prostej k jest równa a .

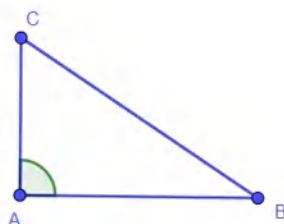
4) Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

Istnieją dwa rozwiązania.

V. Konstrukcja odcinka o długości $\sqrt{a^2 + b^2}$ mając dane długości odcinków a i b , gdzie $a < b$

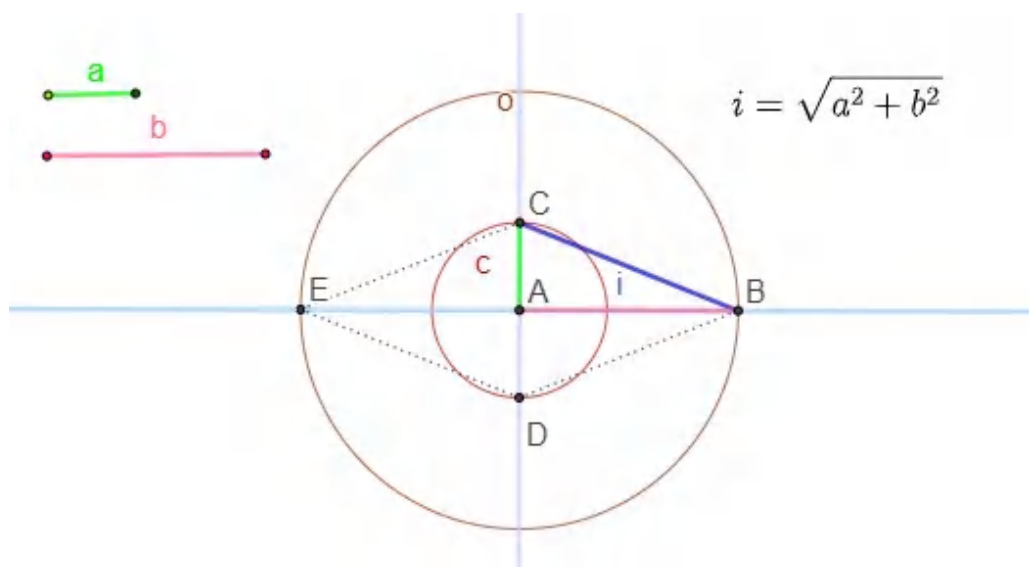
1) Analiza zadania

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b wyraża się wzorem $\sqrt{a^2 + b^2}$. Należy więc zbudować trójkąt prostokątny, którego boki prostopadłe będą miały podane długości a i b .



2) Konstrukcja i jej opis

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|---|
| 1. | Konstruujemy dwie proste prostopadłe. | Proste prostopadłe i ich punkt przecięcia A . |
| 2. | Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i promieniu a i zaznaczamy punkty przecięcia tego okręgu z jedną z prostych prostopadłych np. z pionową prostą. | Punkty C i D i okrąg $c(A, a)$. |
| 3. | Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i promieniu b i zaznaczamy punkty przecięcia tego okręgu z drugą z prostych prostopadłych. | Punkty B i E oraz okrąg $o(A, b)$. |
| 4. | Łączymy punkty B i C odcinkiem. | Szukany odcinek o długości $i = \sqrt{a^2 + b^2}$. |



3) Dowód poprawności konstrukcji

Odcinek $|AC| = a$, zaś odcinek $|AB| = b$, są do siebie prostopadłe, ponieważ leżą na prostych prostopadłych, dodatkowo $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, zatem trójkąt ABC jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej, czyli $|CB|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$. Otrzymujemy, więc: $|CB| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4) Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

Istnieją cztery rozwiązania o ile spełnione jest założenie, że $a < b$.

Link do aktywności w aplikacji Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classic/wmvvvufk>

VI. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt

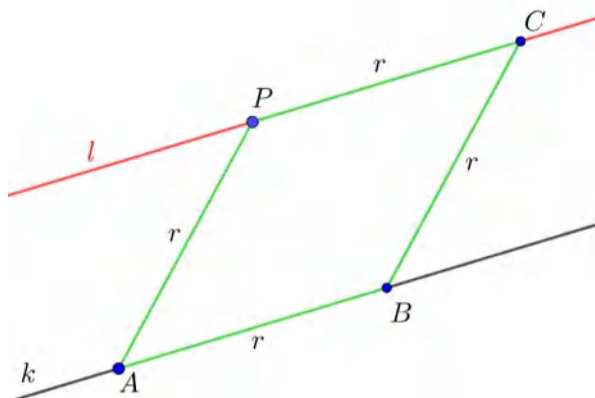
Zadanie. Dana jest prosta k i punkt P leżący poza tą prostą. Skonstruuj prostą l równoległą do prostej k i przechodzącą przez punkt P .

Sposób 1

1. Analiza zadania

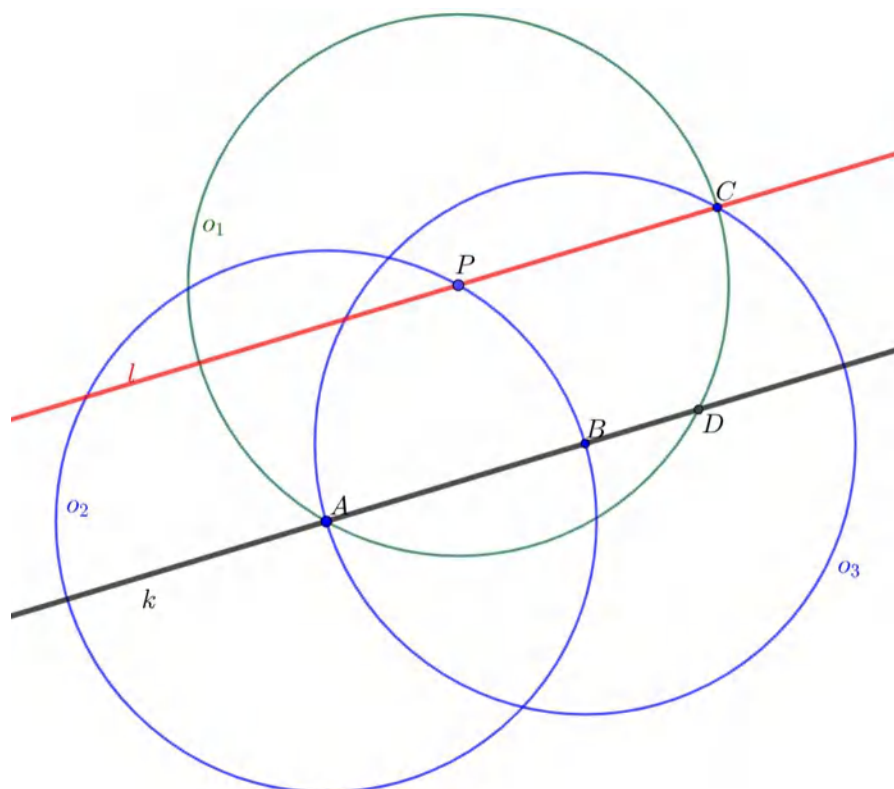
Konstrukcję prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt oprzemy na konstrukcji (budowie) rombu o wskazanej długości boku r , większej niż odległość punktu P od danej prostej k .

Uwaga. Konstrukcja ta może zostać zmodyfikowana poprzez zastąpienie rombu przez równoległobok.



2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|--|
| 1 | Rysujemy prostą i punkt poza tą prostą. | Prosta k oraz punkt P . |
| 2 | Rysujemy okrąg o środku w punkcie P i promieniu r większym od odległości między punktem P a prostą k (wystarczy zadbać o to, aby okrąg przeciął się z prostą k). | Okrąg o_1 oraz punkty A i D (jako punkty przecięcia okręgu o_1 z prostą k). |
| 3 | Z punktu A (można też z punktu D), jako środka, rysujemy okrąg o tym samym promieniu r . | Okrąg o_2 oraz punkt B (jako punkt przecięcia okręgu o_2 i prostej k). |
| 4 | Z punktu B , jako środka, rysujemy okrąg o tym samym promieniu r . | Okrąg o_3 oraz punkt C (jako punkt przecięcia okręgów o_1 i o_3). |
| 5 | Przeprowadzamy prostą przez punkty P i C . | Otrzymujemy postulowaną prostą l . |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Odcinki AP , AB , BC i PC są promieniami odpowiednio okręgów o_1 , o_2 , o_3 , o_1 . Wszystkie wymienione okręgi mają tę samą długość promienia r , więc

$$|AP| = |AB| = |BC| = |PC| = r.$$

Poprawność konstrukcji wynika z definicji i własności rombu, tzn. czworokąt mający równe boki jest rombem oraz w rombie przeciwległe boki są równoległe.

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań zadania

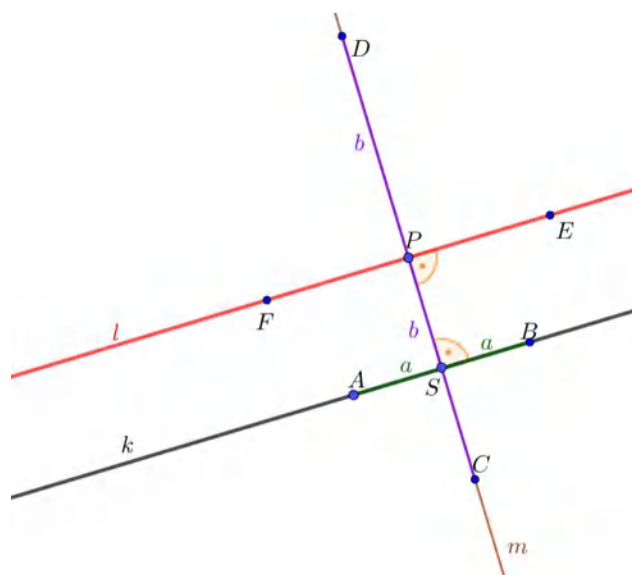
Powyższa konstrukcja jest zawsze wykonalna i istnieje tylko jedno rozwiązanie, bo zawsze można zbudować dokładnie jeden romb o zadanej z góry długości boku. Warto dodać, że z postulatu Euklidesa istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do danej prostej.

Konstrukcja dostępna na <https://www.geogebra.org/m/yt7abmfg>

Sposób 2

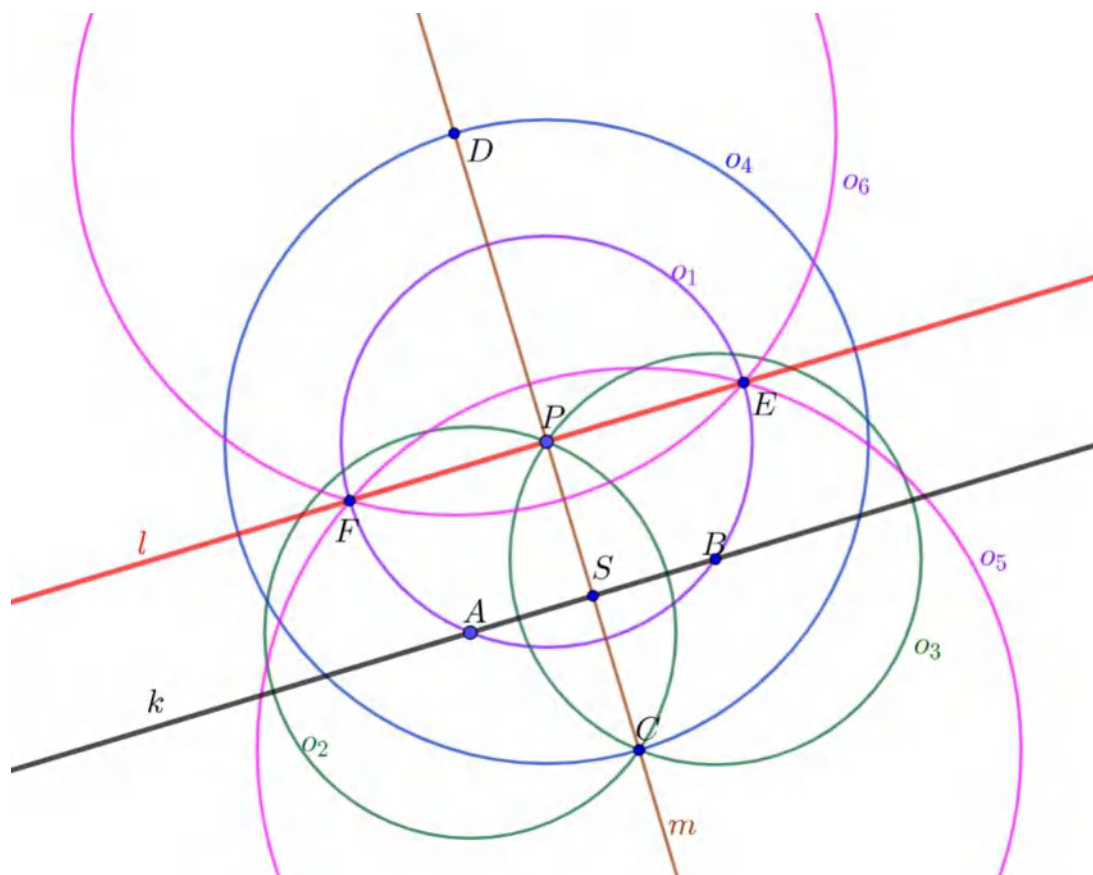
1. Analiza zadania

Tym razem rozwiązanie tego zadania oprzemy na konstrukcji dwóch symetrycznych odcinków; mianowicie (patrz rysunek poniżej) symetrycznej odcinka AB , którą jest prosta m (środkiem odcinka AB jest punkt S) oraz symetrycznej odcinka CD - jest nią szukana prosta l (środkiem odcinka CD jest punkt P).



2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|--|
| 1 | Rysujemy prostą i punkt poza tą prostą. | Prosta k oraz punkt P . |
| 2 | Rysujemy okrąg o środku w punkcie P i promieniu r większym od odległości między punktem P a prostą k (wystarczy zadbać o to, aby okrąg przeciął się z prostą k). | Okrąg o_1 oraz punkty A i B (jako punkty przecięcia okręgu o_1 z prostą k). |
| 3 | Z punktów A i B , jako środków, rysujemy okręgi o tym samym promieniu r . | Otrzymujemy odpowiednio okręgi o_2 i o_3 oraz punkt C (jako drugi - oprócz P - punkt przecięcia okręgów o_2 i o_3). |
| 4 | Przeprowadzamy prostą przez punkty P i C . | Otrzymujemy symetralną odcinka AB oraz punkt S (środek odcinka AB). |
| 5 | Z punktu P , jako środka, rysujemy okrąg o promieniu równym długości odcinka PC . | Okrąg o_4 oraz punkty D taki, że punkt P jest środkiem odcinka CD . |
| 6 | Z punktów C i D , jako środków, rysujemy okręgi o tych samych promieniach (promień tych okręgów jest większy od długości odcinka CP , oczywiście $ CP = DP $). | Otrzymujemy odpowiednio okręgi o_5 i o_6 oraz punkty E i F (jako punkty przecięcia okręgów o_5 i o_6). |
| 7 | Przeprowadzamy prostą przez punkty E i F . | Symetralną odcinka CD , a jednocześnie szukaną prostą l . |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Ponieważ punkty A i B leżą na okręgu o_1 , więc $|PA| = |PB|$. Podobnie punkt C leży na okręgach o_2 i o_3 , więc $|AC| = |BC|$. Tak więc punkty P i C są równoodległe od końców odcinka AB i w konsekwencji prosta m (przechodząca przez punkty C i P) jest symetralną odcinka AB . Z własności symetralnej $m \perp k$ i S jest środkiem odcinka AB .

Ponieważ punkty C i D leżą na okręgu o_4 , więc $|DP| = |CP|$. Punkty E i F leżą na okręgach o_5 i o_6 (okręgach o tym samym promieniu), więc $|ED| = |EC|$ oraz $|CF| = |DF|$. Tak więc punkty E i F są równoodległe od końców odcinka CD i w konsekwencji prosta l (przechodząca przez punkty E i F) jest symetralną odcinka CD . Z własności symetralnej $m \perp l$ oraz P jest środkiem odcinka CD i jednocześnie należy do prostej l . Ostatecznie, ponieważ $k \perp m$ i $m \perp l$, to $k \parallel l$.

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań zadania

Powyższa konstrukcja jest zawsze wykonalna i istnieje tylko jedno rozwiązanie, bo zawsze otrzymujemy dokładnie jedną prostą, która jest symetralną danego odcinka. Ponadto, z piątego aksjomatu Euklidesa, istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do danej prostej.

Konstrukcja dostępna także na <https://www.geogebra.org/m/xhznxvvg>

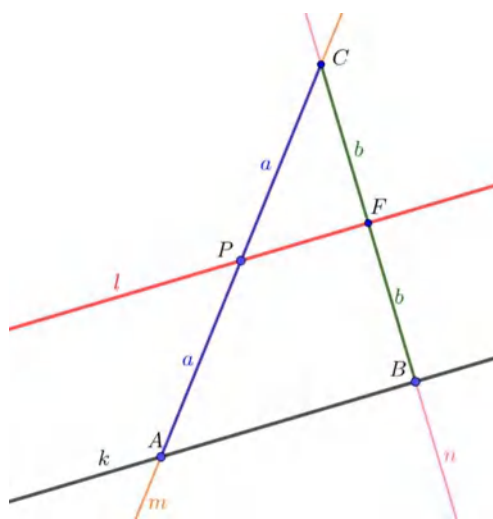
Sposób 3

1. Analiza zadania

Konstrukcję, w tym przypadku, oprzemy na wyznaczeniu takich punktów A , C , B , F (patrz rysunek poniżej), leżących na prostych m i n przecinających się w punkcie C tak aby:

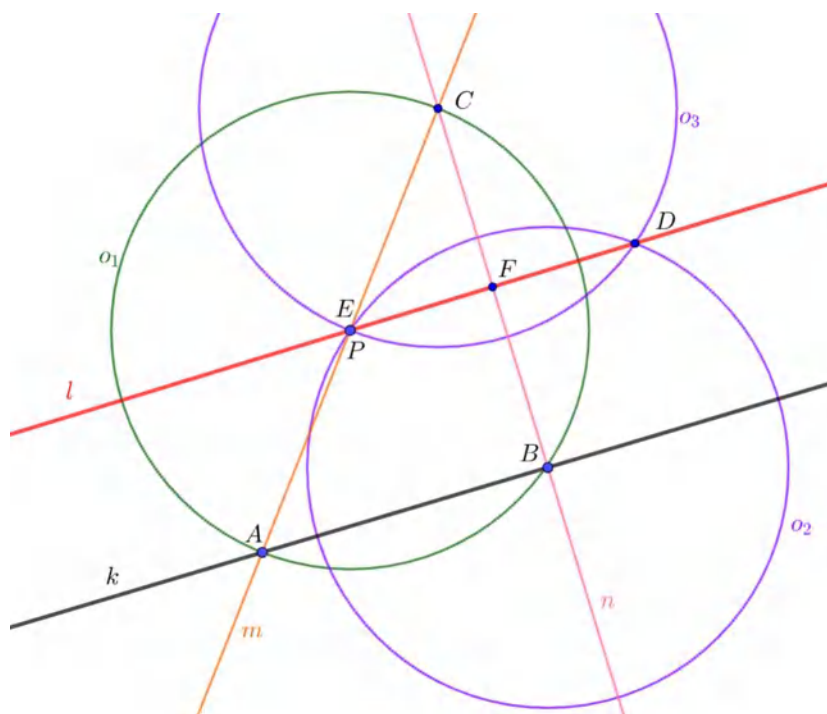
- punkty A i B leżały na prostej k ;
- punkt C był tak dobrany, aby środkiem odcinka AC był punkt P ;
- punkt F był środkiem odcinka BC .

Równoległość prostych k i l będzie wynikała z odwrotnego twierdzenia do twierdzenia Talesa. Przy konstrukcji punktu F wykorzystamy fakt, że symetralną odcinka BC jest prosta l , która przecina odcinek w jego środku.



2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|---|
| 1 | Rysujemy prostą i punkt poza tą prostą. | Prosta k oraz punkt P . |
| 2 | Rysujemy okrąg o środku w punkcie P i promieniu a większym od odległości między punktem P a prostą k (wystarczy zadbać o to, aby okrąg przeciął się z prostą k). | Okrąg o_1 oraz punkty A i B (jako punkty przecięcia okręgu o_1 z prostą k). |
| 3 | Przeprowadzamy prostą przez punkty P i A . | Prosta m oraz punkt C (jako punkt przecięcia okręgu o_1 i prostej m). |
| 4 | Przeprowadzamy prostą przez punkty B i C . | Prosta n . |
| 5 | Z punktów B i C , jako środków, rysujemy okręgi o tych samych promieniach (można przyjąć w szczególności promień długości $ BP = a$). | Otrzymujemy odpowiednio okręgi o_2 i o_3 oraz punkty D i E (jako punkty przecięcia okręgów o_2 i o_3). W przypadku, gdy promień okręgów o_2 i o_3 ma długość $ BP = a$, to punkty E i P pokrywają się. |
| 6 | Przeprowadzamy prostą przez punkty D i E . | Symetralną odcinka BC , punkt F , a jednocześnie szukaną prostą l (punkt $P \in l$). |



3. Dowód poprawności konstrukcji

Jeżeli przyjmiemy, że znamy twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trójkąta, to dowód równoległości prostej k i l jest natychmiastowy.

Przyjmijmy, że nie korzystamy z podanego wyżej twierdzenia i przyjmijmy (jak to jest w powyższej konstrukcji), że promień okręgów o_2 i o_3 ma długość $|BP|$. Ponieważ punkty A, B i C leżą na okręgu o_1 , więc $|PA| = |PB| = |PC| = a$. Ponieważ punkty D i E leżą na okręgach o_2 i o_3 (okręgach o tym samym promieniu $|BP| = a$), więc $|BD| = |CD|, |BE| = |CE| = a$. Tak więc:

- $|BP| = |CP| = |BE| = |CE| = a$, a w konsekwencji $E = P$,
- punkty D i $E = P$ są równoodległe od końców odcinka BC i w konsekwencji prosta l (przechodząca przez punkty D i P) jest symetralną odcinka BC .

Z własności symetralnej punkt F jest środkiem odcinka BC (czyli $|BF| = |CF| = b$) i jednocześnie $F \in l$. Tak więc

$$\frac{|CP|}{|AP|} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{|CF|}{|BF|} = \frac{b}{b} = 1.$$

Stąd i korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $k \parallel l$.

Uwaga. Zamiast stosowania twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa można skorzystać z podobieństwa trójkątów CFP i ABC oraz własności kątów odpowiadających.

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań zadania

Powyższa konstrukcja jest zawsze wykonalna i istnieje tylko jedno rozwiązanie, bo zawsze otrzymujemy dokładnie jedną prostą, która jest symetralną danego odcinka. Warto tu także dodać, że z aksjomatu równoległości Euklidesa istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do danej prostej.

Konstrukcja dostępna także na <https://www.geogebra.org/m/xzthkvmg>

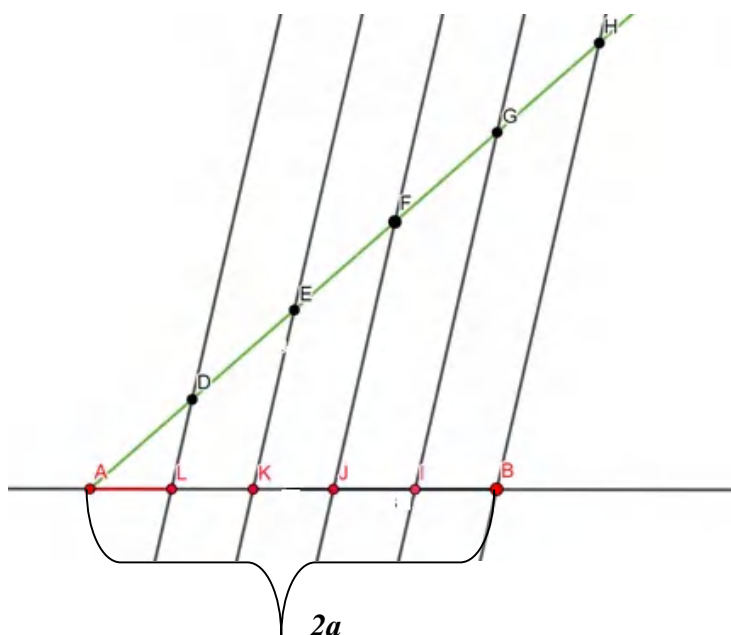
VII. Konstrukcja odcinka o długości $\frac{2a}{5}$

Zadanie. Dany jest odcinek o długości a . Skonstruuj odcinek o długości $\frac{2a}{5}$.

Sposób 1

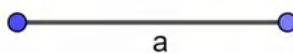
1. Analiza zadania

Aby narysować dany odcinek, należy skonstruować odcinek o długości $2a$ (okrąg o promieniu a , wtedy średnica okręgu będzie miała długość $2a$). Następnie odcinek o długości $2a$ dzielimy na 5 równych części. Wtedy każda z tych części będzie miała długość $\frac{2a}{5}$.

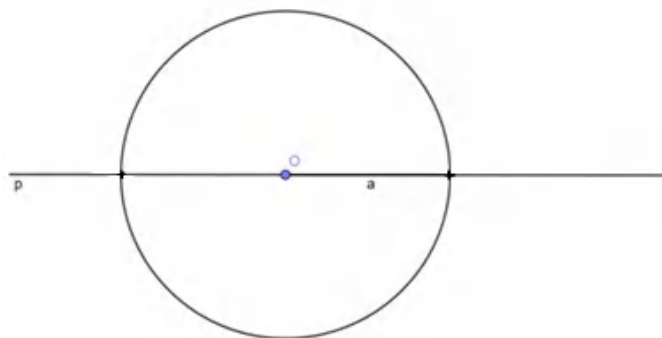


2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

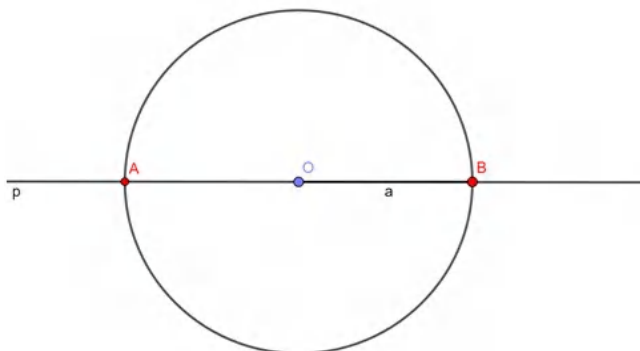
Dane: odcinek o długości a



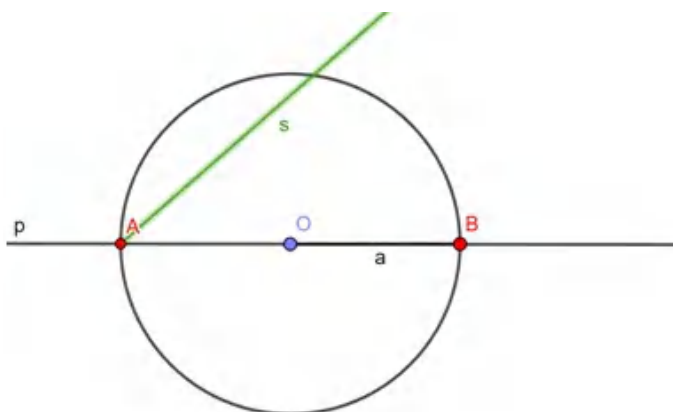
- a) Kreślimy prostą p . Na prostej zaznaczamy punkt O , następnie rysujemy okrąg o środku w punkcie O i promieniu r równym długości odcinka a .



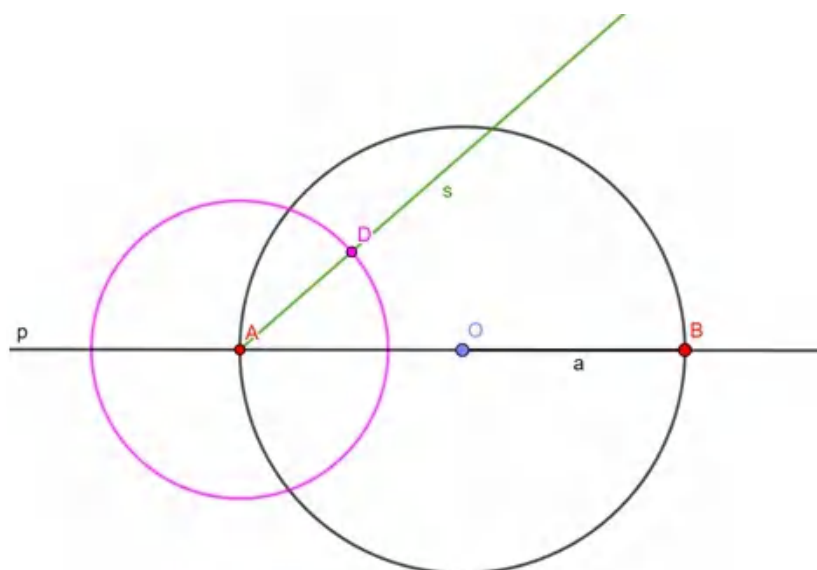
- b) Punkty przecięcia okręgu $o(O, r)$ z prostą p oznaczamy jako A i B . Otrzymujemy odcinek $|AB| = 2a$.



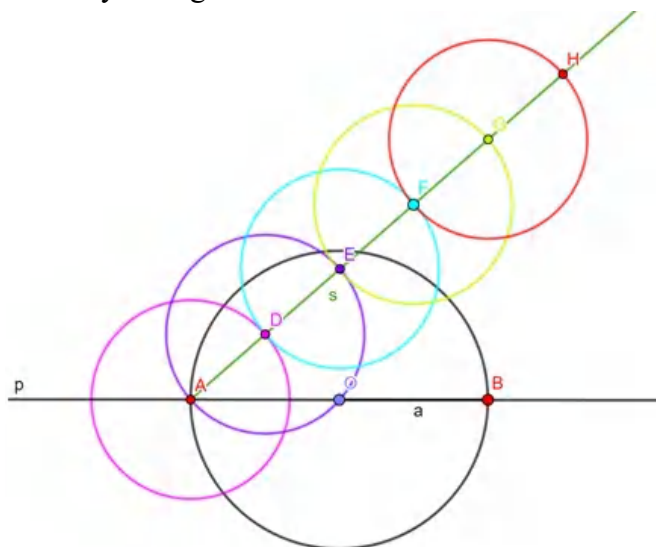
- c) Rysujemy dowolną półprostą s o początku w punkcie A nachyloną do odcinka AB pod kątem mniejszym od kąta prostego.



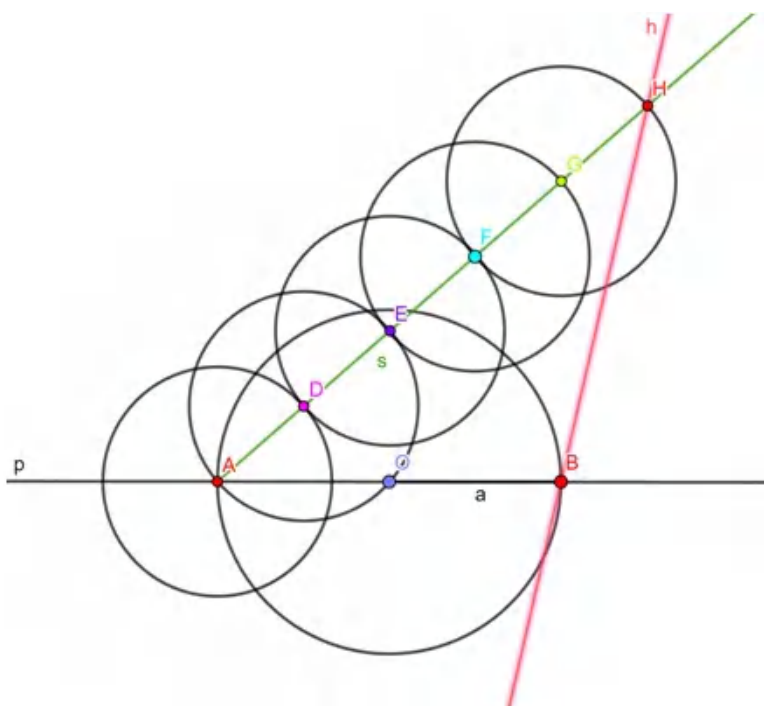
- d) Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i dowolnym promieniu r_1 . Punkt przecięcia półprostej s oraz okręgu $o_1 = (A, r_1)$ oznaczamy jako D .



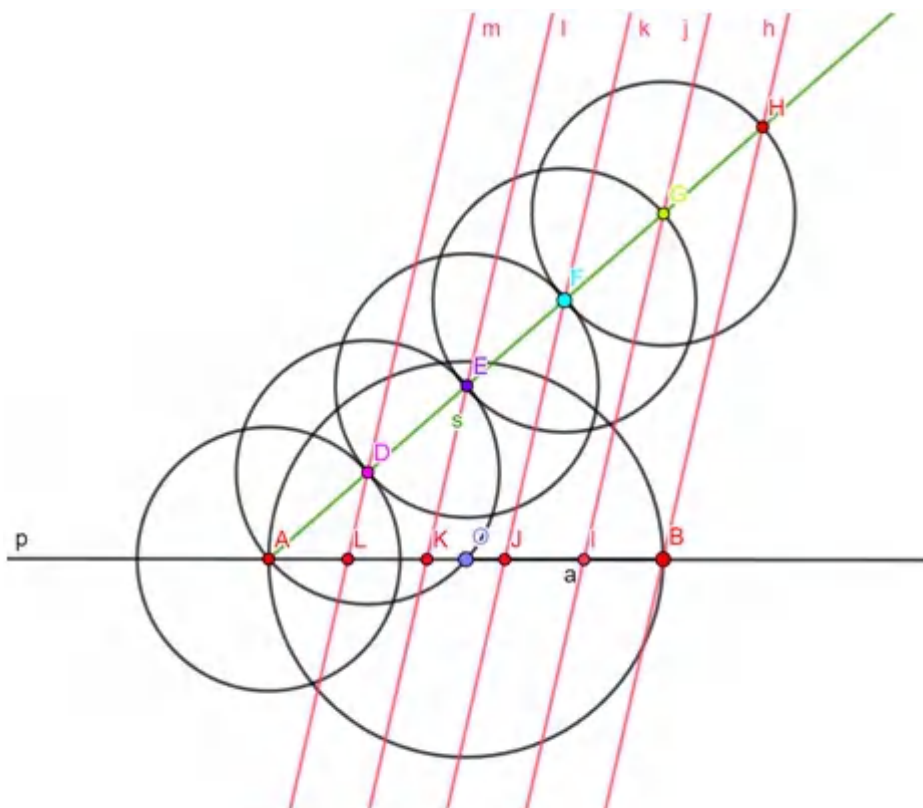
- e) Na półprostej s kreślimy kolejno cztery okręgi o środkach w punktach przecięcia poprzednich okręgów (punkty te oznaczamy kolejno literami E, F, G, H) z półprostą s oraz promieniu równym długości odcinka AD .



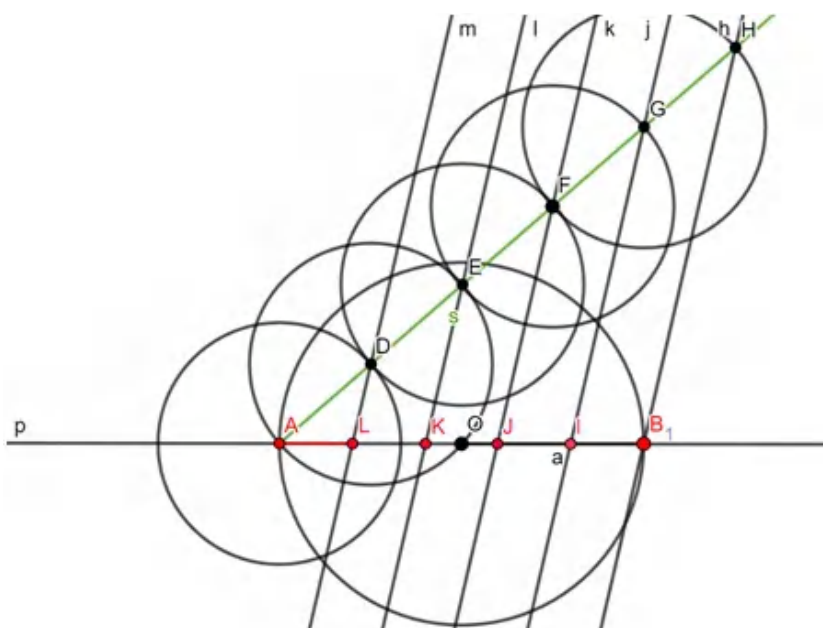
- f) Kreślimy prostą h przechodzącą przez punkty B i H .



- g) Kreślimy cztery proste j, k, l, m równoległe do prostej h przechodzące odpowiednio przez punkty G, F, E, D . Proste te przecinają prostą p odpowiednio w punktach I, J, K, L .



- h) Odcinek AB o długości $2a$ został podzielony na pięć równych części.
Zatem $|AL| = |LK| = |KJ| = |JI| = |IB| = \frac{2a}{5}$



3. Dowód poprawności konstrukcji

Z podobieństwa trójkątów ALD oraz ABH (KKK) wynika, że: $\frac{|AD|}{|AL|} = \frac{|AH|}{|AB|}$

Odcinek $|AH| = 5|AD|$, natomiast $|AB| = 2a$, zatem: $\frac{|AD|}{|AL|} = \frac{5|AD|}{2a}$

$$2a|AD| = 5|AD| \cdot |AL| \quad /: 5|AD|$$

$$|AL| = \frac{2a \cdot |AD|}{5|AD|}$$

$$|AL| = \frac{2a}{5}$$

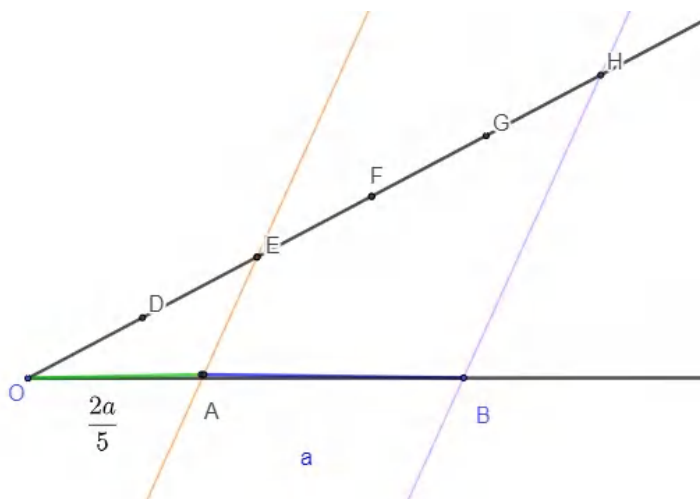
4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

Warunkiem dostatecznym istnienia rozwiązania jest, aby półprosta o początku w punkcie A była nachylona pod kątem różnym od 180^0 . W takim przypadku jest jedno rozwiązanie, ale każdy z odcinków $|AL| = |LK| = |KJ| = |JI| = |IB| = \frac{2a}{5}$ spełnia warunek zadania. W przypadku, gdy będą to proste równoległe (pokrywające się) zadanie nie ma rozwiązania.

Sposób 2

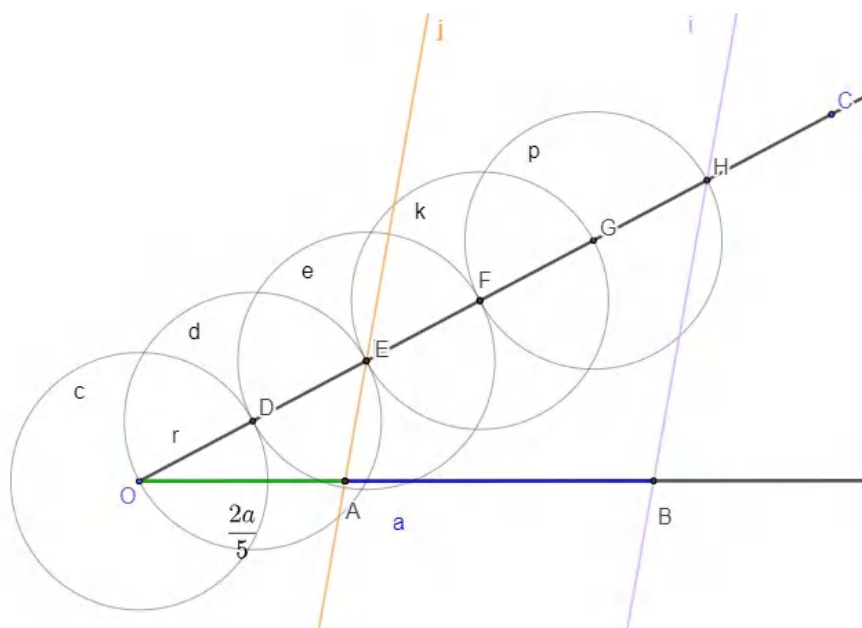
1. Analiza zadania

Aby wyznaczyć odcinek równy długości dwóch piątych danego odcinka można podzielić dany odcinek na pięć równych części i zakresić dwie z tych części. Wykorzystamy do tego własności wynikające z podobieństwa trójkątów oraz równoległości prostych.



2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

| Lp. | Co robimy | Co otrzymujemy |
|-----|---|---|
| 1. | Kreślimy dwie półproste o wspólnym początku O . | Otrzymujemy kąt BOC . |
| 2. | Na półprostej OB odmierzamy długość danego odcinka a . | Odcinek $ OA = a$. |
| 3. | Na półprostej OC kreślimy okrąg o środku w punkcie O i dowolnym promieniu r . | Okrąg $c(O, r)$ oraz punkt D – przecięcia się okręgu i półprostej OC . |
| 4. | Kreślimy kolejne okręgi o tym samym promieniu r i środkach w kolejnych punktach przecięcia z półprostą OC . | Okręgi $d(D, r)$, $e(E, r)$, $k(F, r)$, $p(G, r)$. |
| 5. | Kreślimy prostą i przechodzącą przez Punkty B i H . | Prostą BH . |
| 6. | Kreślimy prostą j równoległą do prostej BH i przechodzącą przez punkt E . | Prostą AE , punkt A – przecięcia prostej j z półprostą OB oraz szukany odcinek $\frac{2a}{5}$. |



3. Dowód poprawności konstrukcji

$|OB| = a$ (dany odcinek),

$|OD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GH| = r$ (z konstrukcji okręgów).

Prosta BH równoległa do AE (z konstrukcji prostych równoległych).

Z powyższego oraz z cechy podobieństwa (KKK) wynika, że trójkąty AOE oraz BOH są podobne.

Prawdziwa jest więc zależność $\frac{2r}{|OA|} = \frac{5r}{a}$, czyli $|OA| = \frac{2a}{5}$.

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań

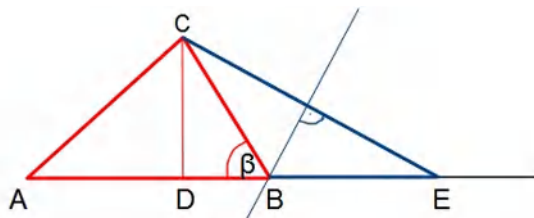
Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie o ile kąt BOA jest mniejszy od 180° .

Link do aktywności w aplikacji Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/bqkfg2uu>

VIII. Konstrukcja trójkąta przy danej sumie dwóch boków, kąta i wysokości

Zadanie. Skonstruuj trójkąt ABC mając dane: sumę długości $|AB| + |BC|$, kąt przy wierzchołku B i wysokość CD .

1. Analiza zadania



Rysujemy trójkąt ABC , a następnie zaznaczamy dane. Znamy sumę długości boków AB i BC , dlatego rysujemy półprostą AB i zaznaczamy odcinek AE taki, że

$$|AE| = |AB| + |BC|.$$

Łatwo zauważyć, iż trójkąt CBE jest równoramienny. Dodatkowo

$$|\sphericalangle CBE| = 180^\circ - \beta.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$|\sphericalangle BCE| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2},$$

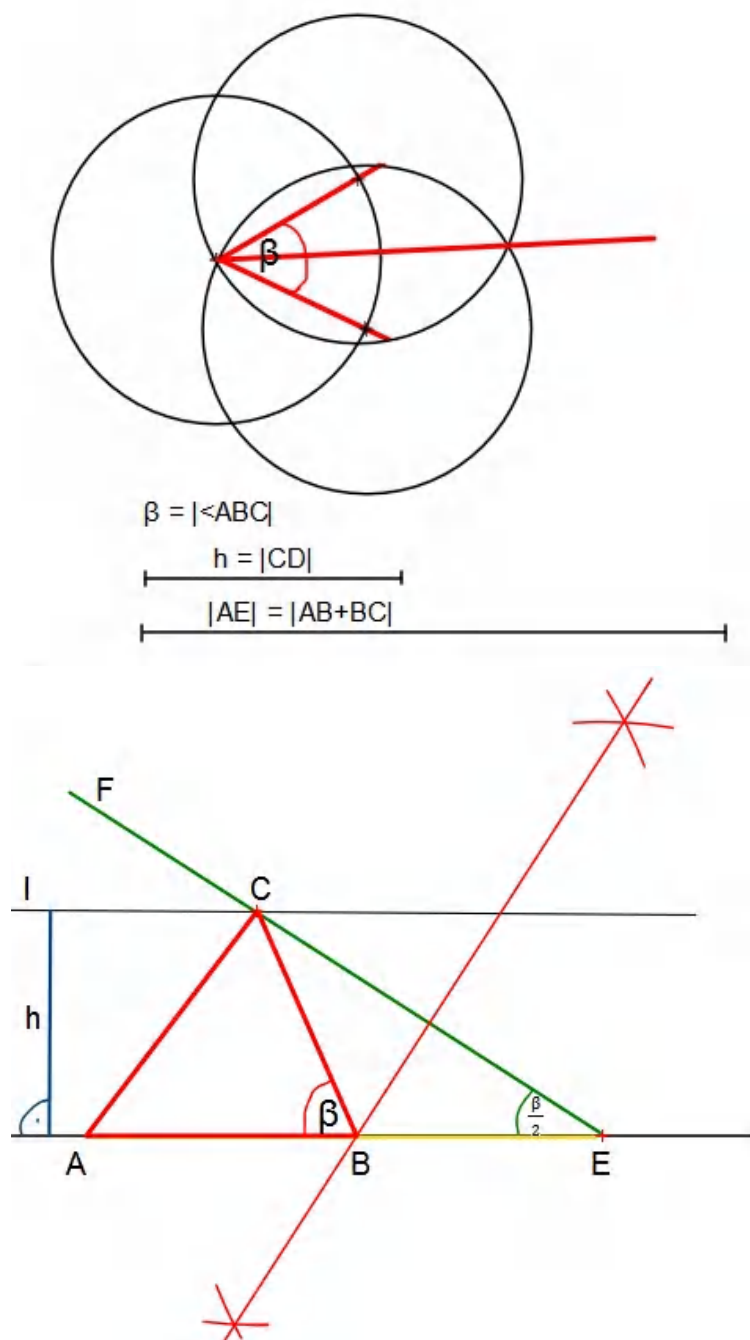
a tym samym

$$|\sphericalangle BEC| = \frac{\beta}{2}.$$

Znamy długość boku AE , $|\sphericalangle AEC|$ i wysokość CD , dlatego możemy narysować trójkąt AEC . Prowadzimy symetralną boku CE dzięki czemu wyznaczymy punkt B .

2. Opis konstrukcji i jej wykonanie

- Rysujemy prostą i zaznaczamy na niej punkt A . Następnie odkładamy odcinek $|AE| = |AB| + |BC|$.
- Konstruujemy kąt o mierze $\frac{\beta}{2}$. Odkładamy go w taki sposób, aby jego wierzchołkiem był punkt E . Jedno ramię kąta ma zawierać się w półprostej EA , natomiast drugie oznaczamy jako EF .
- Prowadzimy prostą l równoległą do prostej AE w odległości $h = |CD|$ od tej prostej. Prosta l przecina półprostą EF w punkcie C .
- Konstruujemy symetralną odcinka CE , która przecina prostą AE . W miejscu przecięcia zaznaczamy punkt B . Otrzymujemy szukany trójkąt ABC .



3. Dowód poprawności konstrukcji

Na symetralnej odcinka CE znajduje się punkt B, dlatego

$$|BE| = |BC| \text{ oraz } |AB| + |BC| = |AB| + |BE|.$$

Trójkąt BCE jest równoramienny. Z konstrukcji wynika, że

$$|\sphericalangle BEC| = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$|\sphericalangle CBE| = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - \beta.$$

Kąty CBA i CBE są przyległe, stąd

$$|\sphericalangle CBA| = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta = |\sphericalangle ABC|.$$

Z konstrukcji również wynika, że punkt C należy do prostej równoległej do prostej AE , która jest odległa o h od prostej AE . A zatem wysokość CD ma zadaną długość h .

4. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań zadania

Zadanie ma jedno rozwiązanie, gdy spełniony jest warunek $0^\circ < |\sphericalangle ABC| < 180^\circ$.

W przeciwnym przypadku zadanie nie ma rozwiązania.