Podkarpacki Ośrodek Edukacji Nauczycieli
oddział w Tarnobrzegu

Perełki liczbowe

JOANNA KOZUBAL

Nie wszystko, co można obliczyć, liczy się i nie wszystko, co się liczy, można obliczyć.

Albert Einstein

Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, inne są dziełem człowieka.

Leopold Kronecker

Liczba to pojęcie abstrakcyjne, jeden z podstawowych obiektów matematycznych

Perełki liczbowe, to niezależne od siebie przykłady ciekawych, czasami wręcz niezwykłych własności pomiędzy liczbami, a także otwarte problemy związane z ich strukturą.

Można się z nimi zapoznawać w dowolnej kolejności.

Autorka opracowania żywi nadzieję, że zaprezentowane zagadnienia zainspirują czytelnika do głębszego poznawania i rozwijania wiedzy o liczbach.

PEREŁKA I - LICZBY BLIŹNIACZE

Liczbami bliźniaczymi nazywamy liczby pierwsze różniące się o dwa.
Przykłady liczb bliźniaczych tworzą pary: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43, 59 i 61, 71 i 73, itd.

Ciekawostka

Pomiędzy liczbami bliźniaczymi (oprócz pary 3 i 5) znajduje sie liczba podzielna przez 6.

Jest to ogólna prawidłowość którą można udowodnić.

PEREŁKA I - LICZBY BLIŹNIACZE

Twierdzenie:
Dla każdej pary liczb bliźniaczych p i $p+2$ oprócz pary liczb 3 i 5 liczba $p+1$ jest podzielna przez 6

Dowód:
Przyjmijmy, że p i $p+2$ są liczbami bliźniaczymi ($p > 3$ jest liczbą pierwszą). Zauważmy, że p, $p+1$, $p+2$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc wśród nich co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna podzielna przez 3. Ponieważ jednak, żadna z liczb p i $p+2$ nie może być podzielna ani przez 2, ani przez 3, bo są to liczby pierwsze większe od 3, więc jedyną liczbą spełniająca oba warunki jest liczba postaci $p+1$. Stąd otrzymujemy, że liczba $p+1$ jest podzielna przez 6

PEREŁKA II - LICZBY PALINDROMICZNE

Liczby palindromiczne (symetryczne) naturalne, to takie, które zapisane w odwrotnej kolejności cyfr przedstawiają tę samą liczbę, np.: 11, 535, 47774, itp
Każda liczba palindromiczna parzystocyfrowa jest podzielna przez 11

np. dla liczby czterocyfrowej mamy:
$1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$

CIEKAWE WŁASNOŚCI LICZB PALINDROMICZNYCH

Wśród liczb palindromicznych możemy wyróżnić:
liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, ...
liczby kwadratowe: 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, ...
liczby sześcienne: 0, 1, 8, 343, 1331,1030301, ...
liczby binarne: 0, 1, 11,111, 1001, 1111, 10001, 10101, ...

Ponadto:
liczb palindormicznych 3-cyfrowych (4-cyfrowych) jest tyle samo, co liczb naturalnych dwucyfrowych
liczb palindormicznych 5-cyfrowych (6-cyfrowych) jest tyle samo, co liczb naturalnych trzycyfrowych
liczb palindormicznych 7-cyfrowych (8-cyfrowych) jest tyle samo, co liczb naturalnych czterocyfrowych, itd.

LICZBY PALINDROMICZNE I KONTRLICZBY

- PROBLEM OTWARTY

Określenie: Kontrliczba danej liczby naturalnej to liczba, która powstaje przez odwrócenie kolejności jej cyfr. Na przykład kontrliczbą liczby 1234 jest 4321

Hipoteza: Niezależnie od liczby początkowej, po skończonej liczbie operacji polegających na dodawaniu do dowolnej liczby naturalnej niebędącej palindromem jej kontrliczby, otrzymamy liczbę palindromiczną (czyli po skończenie wielu krokach procedura się zatrzyma). np. zaczynając od liczby 59

$59+95=154$, $154+451=605$, $605+506=1111$ BINGO!

LICZBY PALINDROMICZNE I KONTRLICZBY

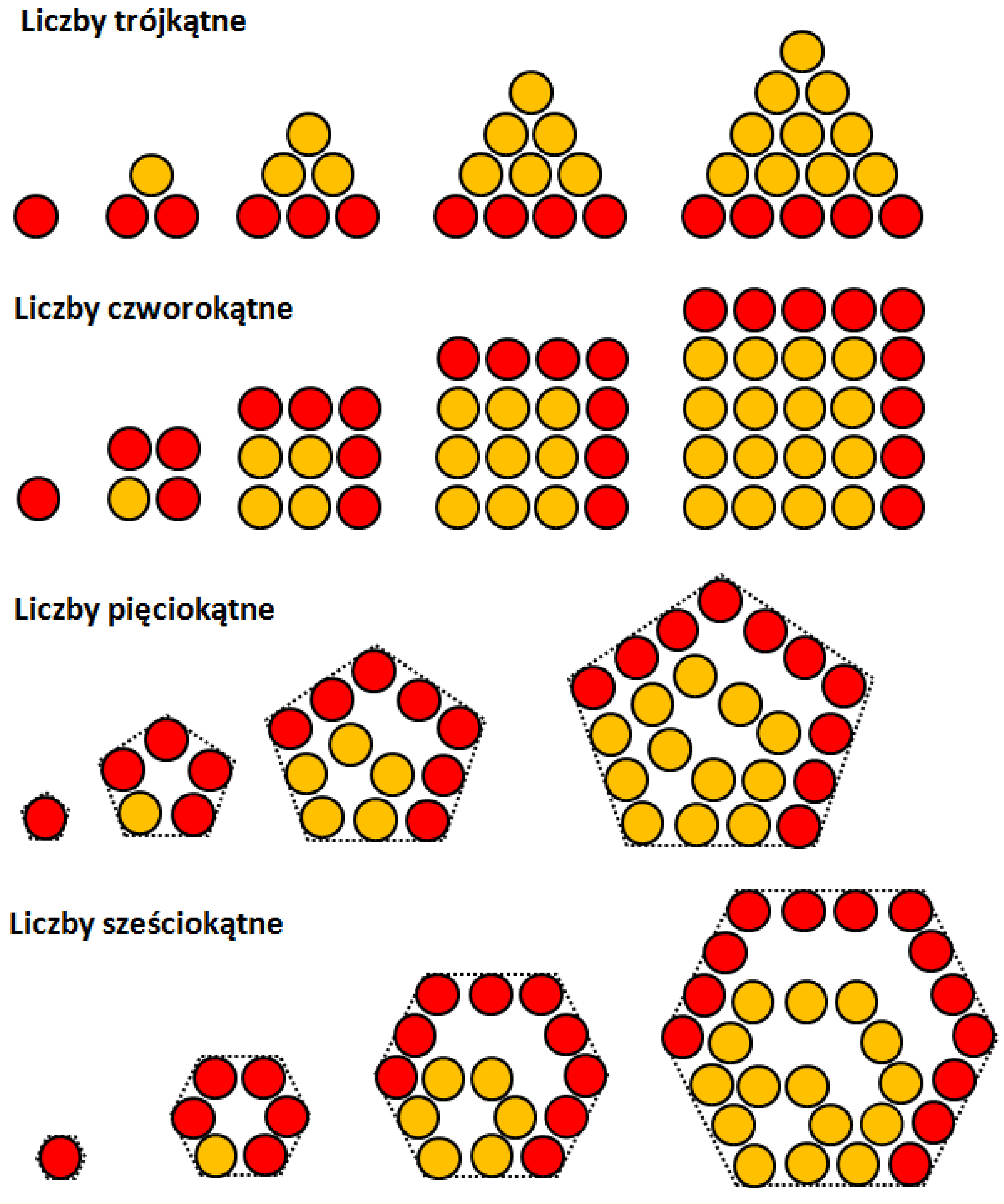
Istnieją jednak liczby np. 169, które mimo ciągu wielu komputerowo wykonanych operacji nie dały palindromu. Takie wątpliwe przypadki (jest ich więcej nazywamy liczbami Lychrela.

Aby stwierdzić, że hipoteza jest prawdziwa (fałszywa), trzeba udowodnić, że istnieje liczba, z której nigdy takimi operacjami palindromu się nie otrzyma. Tego nikt jeszcze nie zrobił.

PEREŁKA III - LICZBY WIELOKĄTNE

Liczby wielokątne prezentowane są jako kropki lub kulki, a liczbą wielokątną nazywamy liczbę, której odpowiadającą liczbą kropek można zbudować wielokąt foremny. Pojęcie liczb wielokątnych zawdzięczamy pitagorejczykom.

Diofantos odkrył wiele prawidłowości rządzących tymi liczbami.
Najbardziej znanymi są **liczby kwadratowe i trójkątne**



https://matfiz24.pl/dzialania-liczbach/liczby-trojkatne-i-wielokatne

PEREŁKA III - WŁASNOŚCI LICZB WIELOKĄTNYCH

Kolejne n-te liczby trójkątne powstają przez dodawanie wszystkich liczb naturalnych aż do n.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

Wzór na n-tą liczbę trójkątną ma postać: $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

liczby trójkątne

Kolejne n-te liczby kwadratowe powstają przez dodawanie wszystkich kolejnych liczb nieparzystych naturalnych aż do 2n-1

$$k_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

Pitagoras wykazał, że suma kolejnych liczb nieparzystych daje pełny kwadrat.

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

liczby kwadratowe

Zagraj i zdobądź możliwie największą liczbę punktów

Zabawa polega na ustawieniu wszystkich cyfr od 0 do 9 w dowolnej kolejności w jednym rzędzie, a następnie z każdej pary sąsiadujących cyfr tworzymy liczby dwucyfrowe w taki sposób, że pierwsza liczba w parze jest liczbą dziesiątek, a druga cyfrą jedności powstanie w ten sposób dziewięć liczb, które zapisujemy w drugim rzędzie, każdą dwucyfrową pomiędzy dwiema cyframi znajdującymi się w górnym wierszu. Przykład:

2	**3**	**4**	**0**	**9**	**7**	**5**	**8**	**1**	**6**
	23	**34**	**40**	**9**	**97**	**75**	**58**	**81**	**16**

Za liczby z dolnego rzędu przyznajemy punkty, według następujących reguł:

- 3 pkt za każdą liczbę pierwszą (np. za liczbę 23)
- 2 pkt za każda liczbę kwadratową (np. za liczbę 9 i za liczbę 16)
- 1 pkt za każdą liczbę trójkątną (w podanym wyżej przykładzie brak liczby trójkątnej)

Wygrywa ten kto zdobędzie największą liczbę punktów w określonym czasie. (*Maksymalny wynik to 23*) pkt.

POWODZENIA

Z. Bobiński, M.K. Mentzen, P. Nodzyński, A. Świątek, *Miniatury matematyczne 15*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2005 r.

PEREŁKA IV - PODZBIORY ZBIORU LICZB NATURALNYCH NIEPARZYSTYCH

Wśród liczb naturalnych wyróżnia się zbiór liczb nieparzystych

$$\{1, 3, 5, 7, \dots 2n-1, 2n+1, \dots\}$$

Przedstawmy powyższy zbiór jako sumę rozłącznych podzbiorów

$$\{1\} \cup \{3,5\} \cup \{7,9,11\} \cup \{13,15,17,19\} \cup \dots$$

Możemy zauważyć ciekawą własność

$$1 = \mathbf{1}, \qquad 3+5=\mathbf{8}, \qquad 7+9+11=\mathbf{27}, \qquad 13+15+17+19=\mathbf{64}$$

a liczby 1, 8, 27, 64 są sześcianami kolejnych liczb naturalnych dodatnich, Możemy stwierdzić, że:

W rozkładzie zbioru liczb naturalnych nieparzystych na sumy rozłącznych podzbiorów jak wcześniej $n-ty$ podzbiór złożony jest z n liczb postaci:

$$\{n(n-1)+1, n(n-1)+3, n(n-1)+5 \ldots n(n\mp 1)-1\},$$

a suma tych wszystkich liczb danego podzbioru jest równa n^3

Dowód tego twierdzenia dokonujemy wykorzystując znany wzór na sumę ciągu arytmetycznego:

$$n(n-1)+1+n(n-1)+3, +n(n-1)+5+\cdots+n(n\mp 1)-1 =$$
$$\frac{1}{2}(n(n-1)+1+n(n\mp 1)-1)n = \frac{1}{2}\cdot 2n^2\cdot n = n^3$$

c.k.d

PEREŁKA V - LICZBY TRÓJKWADRATOWE

Liczby 49, 169, 1681 maja ciekawą własność: kazda z nich jest kwadratem liczby naturalnej i po rozbiciu na dwa segmenty otrzymujemy dwa kwadraty liczb naturalnych

$$49 = 7^2 \quad i \quad 4 = 2^2 \quad i \quad 9 = 3^2$$

$$169 = 13^2 \quad i \quad 16 = 4^2 \quad i \quad 9 = 3^2$$

$$1681 = 41^2 \quad i \quad 16 = 4^2 \quad i \quad 81 = 9^2$$

Jak znaleźć takie liczby?

Szukamy liczb o takiej własności, że każda nich jest kwadratem liczby naturalnej

$$\overline{A_1A_2\ldots A_mB_1B_2\ldots B_k} \quad i \quad \overline{A_1A_2\ldots A_m} \quad i \quad \overline{B_1B_2\ldots B_k}$$

Okazuje się, że dla pewnego $k \geq 3$ możemy je otrzymać korzystając ze wzorów:

$$\frac{5^k}{2^{k-2}} < a^2 < \frac{5^k+10^{\frac{k}{2}}}{2^{k-2}}, \quad b = a^2 \cdot 2^{k-2} - 5^k,$$

oczywiście $b > 0$ oraz $b^2 < 10^k$ (ze względu na zapis dziesiętny liczb)

szukaną liczbą jest liczba postaci: $(2 \cdot 5^k + b)^2$

Co ciekawe, najprawdopodobniej istnieje dokładnie jedna taka liczba a, która spełnia powyższą nierówność i równanie.

Dowód pozostaje problemem otwartym

PRZYKŁADY KOLEJNYCH LICZB TRÓJKWADRATOWYCH

k	a	b	a^2	b^2	$\overline{A_1A_2\dots A_mB_1B_2\dots B_k}$
3	8	3	64	009	$64009 = 253^2$
4	13	51	169	2601	$1692601 = 1301^2$
5	20	75	400	05625	$40005625 = 6325^2$
6	32	759	1024	576081	$1024576081 = 32009^2$

Witold Bednarek, "Dwa w jednym", Matematyka, czasopismo dla nauczycieli nr 4 , 2013 r., str. 50-51

INNE CIEKAWOSTKI O LICZBACH ZOSTAŁY UKRYTE W QR KODACH

Doskonalimy z pasją!

Liczby Dudeneya

Złota liczba

Liczby doskonałe


Liczba jest zaczątkiem i korzeniem przestrzeni
Paul Claudel